Ústní část státní závěrečné zkoušky studijního oboru Matematická analýza se skládá ze společných požadavků z okruhů Reálná a komplexní analýza, Funkcionální analýza a Diferenciální rovnice a z dalších požadavků souvisejících s tématem diplomové práce. Symbolem ** jsou označeny ty části, které jsou povinné pouze pro studenty se zaměřením diplomové práce "diferenciální rovnice", symbolem * části, které jsou povinné pouze pro studenty se zaměřením diplomové práce "teorie funkcí".

Reálná a komplexní analýza

(1) *Teorie míry*: Míra, vnější míra, konstrukce míry z vnější míry, *znaménkové míry a Hahnova věta o rozkladu*, Fubiniova věta, věta o substituci (důkaz pro lineární transformace), Luzinova věta, *Jegorovova věta*, pojem Radonovy míry a Rieszova věta o reprezentaci (bd), Radon-Nikodymova věta (bd).
(2) *Derivace a integrál*: Absolutně spojité funkce a souvislost s neurčitým Lebesgueovým integrálem, funkce s konečnou variací a jejich souvislost s monotonními funkcemi, derivace monotonní funkce (bd).
(3) *Fourierovy řady*: L_1 - teorie; Riemann-Lebesgueova věta, věta o lokalizaci, Diniho kriterium, Jordan-Dirichletovo kriterium (bd), $(C, 1)$–sčítatelnost, Fejérova věta, L_2 - teorie.
(4) *Holomorfní funkce*: Lineární zobrazení v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{C}$, Cauchy-Riemannovy podmínky, primitivní funkce a křivkový integrál, Cauchyova věta a Cauchyův vzorec a jejich důsledky, vztah holomorfních funkcí a mocninných řad, princip maxima modulu, *Morerova věta*, Jordanova věta (bd).
(5) *Izolované singularity holomorfních funkcí*: Laurentovy řady, izolované singularity holomorfních funkcí, Casoratti-Weierstrassova věta, *Picardova věta (bd)*, reziduová věta, vlastnosti indexu bodu, aplikace reziduové věty.
(6) *Meromorfní funkce*: princip argumentu, Rouchéova věta, Mittag-Lefflerova věta, *Rungeho věta*, *celé funkce*.
(7) *Konformní zobrazení*: Konformní zobrazení, inverze holomorfních funkcí, Schwarzovo lemma, Riemannova věta.
(8) *Holomorfní funkce více komplexních proměnných*: souvislost s mocninnými řadami, oddělená holomorfnost, *Hartogsova věta (bd).
(9) *Elementární analytické funkce*: logaritmus, obecná mocnina, funkce neomezeně pokračovatelné - věta o monodromii, izolované singularity.

Základní literatura:

- W. Rudin : Analýza v reálném a komplexním oboru, Academia, Praha 1977, 2. vydání 2003.
- J. Lukeš, J. Malý : Míra a integrál, Univerzita Karlova, Praha 1993.

Funkcionální analýza

(1) *Banachovy prostory*: prostory spojitých lineárních operátorů, kompaktnost jednotkové koule, topologický doplněk, Hahn-Banachova věta a její důsledky, věta o otevřeném zobrazení a uzavřeném grafu, princip stejnoměrné omezenosti a Banach-Steinhausova věta.
(2) *Hilbertovy prostory*: ortogonální projekce, věta o nejlepší aproximaci, reprezentace spojité lineární formy, ortonormální báze.

(3) *Topologické lineární a lokálně konvexní prostory*: *omezené množiny, omezené a spojité operátory*, oddělovací věty, *podmínky metrizovatelnosti a normovatelnosti*, extremální body, Krejn-Milmanova věta.
(4) *Slabé topologie v lokálně konvexních prostorech*: Banach - Alaogluova věta, uzávěr konvexní množiny, *Goldstinovo lemma*, slabá kompaktnost a reflexivita v Banachových prostorech, Eberlain-Šmuljanova věta v Banachových prostorech (bd).
(5) Spektrální teorie: spektrum, rezolventa, spektrální poloměr prvku Banachovy algebry, rezolventní funkce a její vlastnosti, kompaktnost a neprázdnost spektra, vlastní čísla, vlastnosti množiny invertibilních prvků.
(6) *Spektrum lineárního (i nespojitého) operátoru*: kompaktní operátory, Fredholmovy věty (bd), adjungované zobrazení **(i pro nespojitý operátor)**, základní vlastnosti normálních a samoadjungovaných operátorů, Hilbert - Schmidtova věta o kompaktních normálních operátorech.
(7) *Funkční kalkulus a spektrální rozklad*: Analytický funkční kalkulus pro operátory na Banachových prostorech, *spojitý funkční kalkulus pro samoadjungované operátory*, spektrální rozklad spojitého (bd) a **nespojitého samoadjungovaného operátoru (bd)**.
(8) *Diferenciální počet v Banachových prostorech*: Gateauxova a Fréchetova derivace, věta o implicitních funkcích a lokálním difeomorfismu, existence minima pro slabě zdola polospojitý konvexní funkcionál.
(9) *Věty o pevných bodech*: Banachova věta, Brouwerova věta(bd), Schauderova věta, použití na diferenciální a integrální rovnice, topologický stupeň– principy konstrukce a základní vlastnosti.
(10) *Integrální transformace*: Fourierova transformace funkcí z L_1 a L_2, vlastnosti obrazu, obraz konvoluce a derivace, Plancherelova věta, inverzní transformace.
(11) *Teorie distribucí*: prostor testovacích funkcí, distribuce a základní operace s distribucemi, Schwartzův prostor a temperované distribuce, Fourierova transformace funkcí ze Schwartzova prostoru a temperovaných distribucí a její základní vlastnosti, užití v teorii diferenciálních rovnic.

Základní literatura:

- W. Rudin : Analýza v reálném a komplexním oboru, Academia, Praha, 1977, 2. vydání 2003.
- W. Rudin : Functional Analysis, McGraw Hill, 1973.
- J. Lukeš: Zápisky z funkcionální analýzy.
- S. Fučík, J. Milota : Matematická analýza II, skriptum MFF UK, SPN Praha, 1980 (2. vydání).
- P.Drábek a J.Milota: Lectures on nonlinear analysis, Plzeň, 2004.
- P.Drábek a J.Milota: Methods of nonlinear analysis, Birkhhäuser, 2007.

Diferenciální rovnice

A. Obyčejné diferenciální rovnice
   (1) *Diferenciální rovnice n–tého řádu a soustavy n rovnic prvního řádu*: Pojem řešení a maximálního řešení, řešení se spojitou derivací, lokálně absolutně spojité řešení, existence a jednoznačnost (Carathéodoryho podmínky, podmínky pro jednoznačnost, maximální řešení), spojitá

závislost řešení na počátečních podmínkách a na parametrech (bd), vztah řešení a kompaktních podmnožin definičního oboru pravé strany.

(2) *Soustavy lineárních diferenciálních rovnic a rovnic n–tého řádu*: Fundamentální systém, Liouvilleova formule, variace konstant, autonomní soustavy, soustavy s periodickou maticí a jejich transformace na autonomní soustavy, **okrajová úloha pro rovnice druhého řádu na kompaktním intervalu, adjungovaná úloha, Greenova funkce, samoadjungovaná úloha a úplný systém vlastních funkcí**.

(3) *Diferencovatelnost řešení vzhledem k počátečním podmínkám*: **Diferencovatelnost řešení vzhledem k počátečním podmínkám, rovnice ve variacích (bd).**

(4) *Autonomní soustavy*: Posunutí řešení v časové ose, trajektorie a fázový prostor řešení, stabilita stacionárního řešení, stabilní a nestabilní varieta stacionárního řešení (bd).

(5) *Asymptotické vlastnosti*: **Asymptotické vlastnosti autonomních rovnic, limitní množiny, Poincaré-Bendixsonova teorie rovinných soustav (bd).**

(6) *Bifurkace*: **Jednoduché bifurkace stacionárního řešení autonomní rovnice (bd), Hopfova bifurkace (bd).**

(7) *Stabilita*: **Stabilita a asymptotická stabilita (bd), metoda ljapunovských funkcí (bd).**

Základní literatura:

- J. Kofroň: Obyčejné diferenciální rovnice v reálném oboru (skripta), Praha, Karolinum, 2004
- J.K. Hale, H. Kocak: Dynamics and bifurcations, New York, Springer, 1991
- J. Kurzweil : Obyčejné diferenciální rovnice, SPN Praha 1970.
- J. Kurzweil : Obyčejné diferenciální rovnice, SNTL Praha 1978 (existuje anglický překlad)
- V.I.Arnold : Obyknovennye differencialnye uravnenija, Nauka Moskva, 1971.

B. Parciální diferenciální rovnice

(1) *Lokální řešitelnost Cauchyovy úlohy*: Věta Cauchyova-Kowalevské (bd), charakteristický směr a charakteristická plocha pro lineární parciální diferenciální rovnice a jejich význam, charakteristiky základních rovnic matematické fyziky.

(2) *Cauchyova úloha pro rovnici vedení tepla*: Řešení Cauchyovy úlohy pro rovnici vedení tepla, princip maxima a jednoznačnost řešení, závislost řešení na datech úlohy.

(3) *Cauchyova úloha pro vlnovou rovnici*: Řešení úlohy, šíření vln v případě dimenzí 1, 2 a 3, jednoznačnost řešení.

(4) *Dirichletova úloha pro eliptickou rovnici*: Greenova funkce a řešení Dirichletovy úlohy pro kouli a poloprostor, princip maxima a jednoznačnost řešení, závislost řešení na datech úlohy, harmonické funkce a jejich vlastnosti: princip maxima, věta o průměru, Liouvilleova věta, Harnackovy věty, odstranitelné singularity.

(5) *Sobolevovy prostory*: Sobolevovy prostory pro $p = 2$. **Sobolevovy prostory pro obecné p**, hustota hladkých funkcí, věty o stopách, věty o spojitém a kompaktním vnoření (bd).

(6) *Slabá řešení lineárních a nelineárních eliptických rovnic*: Slabá řešení okrajových úloh, jejich existence a jednoznačnost pomocí Laxovy- Milgramovy věty, použití vět o Fredholmově alternativě, **regularita slabého řešení, souvislost s variačním počtem, nelineární eliptické rovnice, Galerkinova metoda a metoda monotonních operátorů.**

(7) *Lineární evoluční rovnice*: **Slabá řešení obecné počátečně-okrajové úlohy, jejich existence a jednoznačnost energetickou metodou (založenou na apriorních odhadech).**

Základní literatura:

- O. John, J. Nečas : Rovnice matematické fyziky, SPN 1972.
- P. Doktor : Moderní metody řešení parciálních diferenciálních rovnic, SPN 1976.
- L.C. Evans: Partial differential equations, AMS, 1998.
- M. Renardy, R.C. Rogers: An introduction to partial differential equations, Texts in Applied Mathematics, 13. Springer-Verlag, New York, 2004.
- I.G. Petrovskij : Lekcii ob uravněnijach s častnymi proizvodnymi, Moskva 1961 (český překlad staršího vydání - Přírodovědecké nakladatelství Praha 1952).
- V.S. Vladimirov : Uravněnija matěmatičeskoj fiziki, Nauka Moskva 1967.